Complexes mixtes sur un schéma de type fini sur $\mathbb{Q}$

7 avril 2011

1 Énoncé du problème

On fixe un corps de nombres E.

Pour tout schéma séparé de type fini X sur E, on note $D^b_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ la catégorie des complexes ℓ-adiques mixtes horizontaux définie par A. Huber dans [Hub] 3.1. [1] [2] Intuitivement, c'est la catégorie des complexes ℓ-adiques sur X qui proviennent d'un complexe ℓ-adique constructible sur un modèle de X sur un ouvert U de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_E)$, où dans la définition de "constructible" on n'autorise que des strates lisses sur U. On peut définir une notion de poids pour de tels complexes : on regarde leurs restrictions aux fibres au-dessus des points fermés de U, d'où une notion d'objets purs. Les complexes mixtes sont comme d'habitude ceux dont tous les faisceaux de cohomologie sont extensions successives de faisceaux purs. Noter que l'on demande aussi que les morphismes dans $D^b_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ s'étendent à des modèles au-dessus d'un ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_E)$. (Cette condition n'est pas vide, voir la fin de la section 1 de [Hub].)

D'après les sections 2 et 3 de [Hub], on dispose des 6 opérations sur les catégories $D^b_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. (En fait on dispose aussi des foncteurs cycles proches et cycles évanescents, voir la remarque 3.3.)

La catégorie $D^b_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est par ailleurs munie d'une t-structure perverse par [Hub] 2.5 et et 3.2, et on note $\mathrm{Perv}_m(X)$ son coeur, c'est-à-dire la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux pervers mixtes horizontaux sur X.

[1] Dans [Hub], Huber choisit un modèle plat et de type fini de X sur un ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_E)$ pour définir cette catégorie ; mais, grâce à EGA IV 8.8.2, toutes les catégories qu'on obtient ainsi sont canoniquement équivalentes.

[2] On pourrait aussi utiliser comme coefficients $\mathbb{Q}_\ell$ ou une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. Cela ne changerait rien aux constructions de cette note.

Remarque 1.1 Lorsque l'on a besoin d'encadrer les poids (ou les degrés de cohomologie, ordinaire ou perverse) pour des objets de $D^b_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, on peut appliquer les résultats de [BBD] pour les catégories de faisceaux ℓ-adiques mixtes sur un schéma sur un corps fini, et ce grâce au théorème de changement de base générique de Deligne (SGA 4 1/2 [Th. finitude] section 2). Cette méthode est en particulier utilisée pour prouver 3.4 et 3.5 dans [Hub]. Dans la suite, on l'utilisera sans commentaire particulier.

Enfin, on dispose de la notion de filtration par le poids sur un objet de $\mathrm{Perv}_m(X)$ ([Hub] 3.7). Une telle filtration est nécessairement unique si elle existe ([Hub] 3.8), mais elle n'existe pas toujours. La sous-catégorie pleine des objets de $\mathrm{Perv}_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ admettant une filtration par le poids est tout de même abélienne, mais elle n'est évidemment pas stable par extensions.

Or, c'est bien embêtant car on voudrait appliquer les méthodes de la section 3 de [Mor] pour calculer des complexes d'intersections de variétés sur E, et cela n'est pas possible si l'on n'a pas de filtration par le poids sur les faisceaux pervers mixtes.

Le but de cette note est de proposer une solution, inspirée par le fait suivant (dû à Beilinson). Ce fait n'est pas strictement nécessaire mais indique tout de même qu'on ne va pas faire n'importe quoi.

Fait 1.2 Le foncteur réalisation $D^b(\mathrm{Perv}_m(X)) \longrightarrow D^b_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (défini dans [BBD] 3.1.9 et 3.1.10) est une équivalence de catégories.

Démonstration. Les méthodes de [Beĭ2] et [Beĭ1] s'appliquent.

□

L'idée est donc de remplacer $D^b_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ par la catégorie dérivée (bornée) de la catégorie abélienne des faisceaux perverse mixtes admettant une filtration par le poids, ou d'une sous-catégorie convenable. (C'est-à-dire de tuer brutalement toutes les extensions qui nous embêtent.) Le problème est alors de montrer que les 4 opérations se relèvent à ces catégories. Pour cela, on s'inspire largement de l'article [Beĭ2] déjà cité de Beilinson et du preprint [Sai] de M. Saito. En fait, cette note ne contient pas vraiment de méthodes nouvelles, son principal intérêt consistant à exhiber des catégories auxquelles les méthodes déjà existantes peuvent s'appliquer pour donner des résultats utiles.

2 Théorème principal

On veut montrer que, si l'on choisit convenablement les sous-catégories abéliennes $\mathscr{M}(X)$ de $\mathrm{Perv}_m(X)$, alors les 4 opérations se relèvent aux catégories dérivées $D^b(\mathscr{M}(X))$.

Théorème 2.1 *Supposons donnée, pour tout* X*, une sous-catégorie abélienne pleine* $\mathscr{M}(X)$ *de* $\mathrm{Perv}_m(X)$*, contenant* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[d]$ *si* X *est lisse et purement de dimension* d*, stable par dualité et par twists à la Tate, et supposons que ces catégories vérifient les conditions suivantes :*

(a) Pour toute immersion fermée $i : X \longrightarrow Y$, i_* *induit une équivalence de* $\mathscr{M}(X)$ *avec la sous-catégorie pleine de* $\mathscr{M}(Y)$ *des faisceaux pervers dont le support est contenu dans* X.

(b) Pour tout morphisme étale $f : X \longrightarrow Y$, f^* *envoie* $\mathscr{M}(Y)$ *dans* $\mathscr{M}(X)$.

(c) Pour tout morphisme affine $f : X \longrightarrow Y$ *et tout* $k \in \mathbb{Z}$, ${}^pH^k f_*$ *envoie* $\mathscr{M}(X)$ *dans* $\mathscr{M}(Y)$.

(d) Pour tous X *et* Y*, pour tous* $K \in \mathscr{M}(X)$ *et* $L \in \mathscr{M}(Y)$*, le produit tensoriel externe* $K \boxtimes L$ *est dans* $\mathscr{M}(X \times Y)$.

Notons $\eta : D^b(\mathscr{M}(X)) \longrightarrow D^b_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ *le composé du foncteur évident* $D^b(\mathscr{M}(X)) \longrightarrow D^b(\mathrm{Perv}_m(X))$ *et du foncteur réalisation* $D^b(\mathrm{Perv}_m(X)) \longrightarrow D^b_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ *de [BBD] 3.1.10.* [3]

Alors :

(i) Le foncteur exact $D : \mathscr{M}(X) \longrightarrow \mathscr{M}(X)$ *se prolonge en un foncteur* t*-exact* $D^{\mathscr{M}} : D^b\mathscr{M}(X) \longrightarrow D^b\mathscr{M}(X)$ *muni d'un isomorphisme fonctoriel canonique* $\eta \circ D^{\mathscr{M}} \simeq D \circ \eta$.

(ii) Le foncteur exact $\boxtimes : \mathscr{M}(X) \times \mathscr{M}(Y) \longrightarrow \mathscr{M}(X \times Y)$ *se prolonge en un foncteur* t*-exact* $\boxtimes^{\mathscr{M}} : D^b(\mathscr{M}(X)) \times D^b(\mathscr{M}(Y)) \longrightarrow D^b(\mathscr{M}(X \times Y))$ *muni d'un isomorphisme fonctoriel canonique* $\eta \circ \boxtimes^{\mathscr{M}} \simeq \boxtimes \circ (\eta, \eta)$.

(iii) Pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$*, il existe des foncteurs* $f_!^{\mathscr{M}}, f_*^{\mathscr{M}} : D^b(\mathscr{M}(X)) \longrightarrow D^b(\mathscr{M}(X))$ *et un morphisme fonctoriel* $f_!^{\mathscr{M}} \longrightarrow f_*^{\mathscr{M}}$*, munis d'isomorphismes fonctoriels* $\eta \circ f_!^{\mathscr{M}} \simeq f_! \circ \eta$, $\eta \circ f_*^{\mathscr{M}} \simeq f_* \circ \eta$ *qui font commuter le diagramme évident. Ces foncteurs se composent de la manière habituelle, et le morphisme* $f_!^{\mathscr{M}} \longrightarrow f_*^{\mathscr{M}}$ *est un isomorphisme si* f *est propre. Si* f *est affine, alors* $f_*^{\mathscr{M}}$ *(resp.* $f_!^{\mathscr{M}}$*) est le foncteur dérivé à gauche (resp. à droite) de la restriction de* ${}^pH^0 f_*$ *(resp.* ${}^pH^0 f_!$*) à* $\mathscr{M}(X)$.

(iv) Pour tout $f : X \longrightarrow Y$, $f_*^{\mathscr{M}}$ *(resp.* $f_!^{\mathscr{M}}$*) admet un adjoint à gauche (resp. à droite)* $f^*_{\mathscr{M}}$ *(resp.* $f^!_{\mathscr{M}}$*). On a un morphisme fonctoriel* $f^*_{\mathscr{M}} \longrightarrow f^!_{\mathscr{M}}$*, et des isomorphismes fonctoriels* $\eta \circ f^*_{\mathscr{M}} \simeq f^* \circ \eta$ *et* $\eta \circ f^!_{\mathscr{M}} \simeq f^! \circ \eta$ *qui font commuter le diagramme évident. Si* f *est étale, alors le morphisme* $f^*_{\mathscr{M}} \longrightarrow f^!_{\mathscr{M}}$ *est un isomorphisme, et* $f^*_{\mathscr{M}}$ *est le foncteur induit par la restriction de* f^* *à* $\mathscr{M}(Y)$.

Remarque 2.2 Ce résultat est très proche d'une version affaiblie des résultats de M. Saito dans [Sai], et les méthodes de preuve sont d'ailleurs à peu près les mêmes (et inspirées de l'article [Beĭ2] de Beilinson). Les hypothèses ici sont plus fortes par certains points (on se place dans une sous-catégorie *pleine* de la catégorie des faisceaux pervers où l'on connaît les 6 opérations) et plus faibles par d'autres (on ne suppose pas pour l'instant l'existence d'une filtration par le poids, mais on le fera dans les applications ; surtout, on ne suppose pas que les objets purs dans $\mathscr{M}(X)$ sont semi-simples).

[3] Note : η n'est ni plein ni fidèle. Cependant, η est t-exact, donc on a ${}^pH^k \circ \eta = H^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc η est conservatif (c'est-à-dire qu'un morphisme u de $D^b\mathscr{M}(X)$ est un isomorphisme si et seulement si $\eta(u)$ est un isomorphisme, ou de manière équivalente qu'un objet K de $D^b\mathscr{M}(X)$ est nul si et seulement si $\eta(K)$ est nul).

On va prouver le théorème en plusieurs étapes. Déjà, les points (i) et (ii) sont clairs (cf [Beĭ2] A.7.1). On remarque aussi que, pour prouver (iv) (en supposant (iii) déjà connu), il suffit de montrer que les foncteurs $f_*^{\mathscr{M}}$ et $f_!^{\mathscr{M}}$ de (iii) ont des adjoints du bon côté, toutes les autres propriétés énoncées dans (iv) résultant des propriétés des foncteurs adjoints (et, pour les dernières, du fait que f^* est exact et isomorphe à $f^!$ pour f étale).

Dans les trois lemmes suivants, on suppose que les hypothèses du théorème sont vérifiées.

Lemme 2.3 *Le point (iii) du théorème est vrai (existence des relèvements des foncteurs f_* et $f_!$.)*

Démonstration. D'après les hypothèses (b) et (c), si j est une immersion ouverte, alors j^* préserve les catégories $\mathscr{M}(X)$, et si de plus j est affine, alors les foncteurs t-exacts $j_!$ et j_* préservent aussi les catégories $\mathscr{M}(X)$. Ceci montre que l'analogue du lemme 3.3 de [Beĭ2] est vrai pour les catégories $\mathscr{M}(X)$, puisque sa preuve s'applique. (Plus précisément, on obtient l'énoncé suivant : Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme, $j_i : U_i \longrightarrow X$ une famille finie d'immersions ouvertes affines et $K \in \mathscr{M}(X)$. Alors il existe un morphisme surjectif $L \longrightarrow K$ dans $\mathscr{M}(X)$ tel que, pour tout i et tout $k \neq 0$, ${}^pH^k(fj_i)_*L = 0$. La preuve consiste à trouver un plongement ouvert affine $j : U \longrightarrow X$ tel que $L = j_!j^*K$ vérifie la propriété souhaitée, et elle marche aussi dans notre cas car le foncteur $j_!j^*$ envoie $\mathscr{M}(X)$ dans $\mathscr{M}(X)$.)

Une fois que l'on a ce lemme, on construit $f_*^{\mathscr{M}}$ et $f_!^{\mathscr{M}}$ comme dans [Beĭ2] 3.4, et les propriétés de (iii) sont claires.

□

Lemme 2.4 *Soit $i : Y \longrightarrow X$ une immersion fermée. Alors il existe un foncteur $i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^* : D^b\mathscr{M}(X) \longrightarrow D^b\mathscr{M}(X)$ et un morphisme fonctoriel $id \longrightarrow i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^*$ qui relèvent le foncteur $i_*i^* : D_m^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \longrightarrow D_m^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et le morphisme $id \longrightarrow i_*i^*$ induit par l'adjonction. De plus, pour tous $K \in D^b\mathscr{M}(X)$ et $L \in D^b\mathscr{M}(Y)$, le morphisme $id \longrightarrow i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^*$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(X)}(i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^* K, i_*^{\mathscr{M}} L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(X)}(K, i_*^{\mathscr{M}} L).$$

En particulier, sous les hypothèses du lemme ci-dessus, le foncteur $i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^*$ envoie $D^b\mathscr{M}(X)$ dans la sous-catégorie pleine des complexes dont tous les objets de cohomologie sont à support dans Y (notée $D_Y^b\mathscr{M}(X)$), donc les foncteurs ${}^pH^k i^*$, $k \in \mathbb{Z}$, envoient $\mathscr{M}(X)$ dans $\mathscr{M}(Y)$.

Démonstration. Voici l'idée dans le cas où i est l'immersion fermée complémentaire d'une immersion ouverte affine $j : U \longrightarrow X$. Pour $K \in \mathscr{M}(X)$, on définit $i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^* K$ comme l'image dans $D^b(\mathscr{M}(X))$ du complexe $j_!j^*K \longrightarrow K$, où K est placé en degré 0 ; on a un morphisme fonctoriel évident $K \longrightarrow i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^* K$. Il est clair que ce foncteur et ce morphisme fonctoriel vérifient les propriétés de l'énoncé.

Traitons maintenant le cas général. On note comme avant $j : U \longrightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire de Y, mais on ne suppose plus j affine. Soit $(j : U_i \longrightarrow U)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert affine fini de U. Pour tout $J \subset I$ non vide, on note $j_J : U_J \longrightarrow U$ l'immersion de l'ouvert $\bigcap_{i \in J} U_i$. Comme X est séparé, tous les U_J sont affines, donc les j_J sont des immersions ouvertes affines. On note aussi n le cardinal de I.

Soit $K \in \mathscr{M}(X)$. Alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow L_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow L_1 \longrightarrow j^* K \longrightarrow 0,$$

avec

$$L_k = \bigoplus_{J \subset I, |J| = k} j_{J!} j_J^* j^* K \in \mathscr{M}(X),$$

et cette suite exacte est fonctorielle en K. On remarque aussi que $j_! L_k$ est pervers pour tout k (car les $j j_J$ sont affines), et qu'il est donc dans $\mathscr{M}(X)$. On obtient donc un complexe

$$C(K) = (j_! L_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow j_! L_1 \longrightarrow K)$$

dans $\mathscr{M}(X)$, avec K placé en degré 0, qui est fonctoriel en K et muni d'un morphisme évident $K \longrightarrow C(K)$ (où on voit K comme un complexe concentré en degré 0), et dont l'image dans $D^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est $i_* i^* K$. On prend pour $i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^* K$ l'image de $C(K)$ dans $D^b(\mathscr{M}(X))$.

Pour montrer le dernier isomorphisme, on peut supposer que K et L sont concentrés en degré 0 (c'est-à-dire pervers). Alors $i_*^{\mathscr{M}} L = i_* L$ est aussi pervers, et $i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^* K$ et $i^* K$ sont concentrés en degré ≤ 0. De plus, $H^0 i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^* K = i_* {}^p H^0 i^* K$, et on voit facilement que le morphisme $\mathrm{Hom}_{D^b \mathscr{M}(X)}(i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^* K, i_*^{\mathscr{M}} L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D^b \mathscr{M}(X)}(K, i_*^{\mathscr{M}} L)$ est égal au composé

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{D^b \mathscr{M}(X)}(i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^* K, L) & = & \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}(X)}(H^0 i_*^{\mathscr{M}} i_{\mathscr{M}}^* K, i_* L) \\ & = & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Perv}_m(X)}(i_* {}^p H^0 i^* K, i_* L) \\ & \stackrel{\sim}{\rightarrow} & \mathrm{Hom}_{Perv_m(X)}(K, i_* L) \\ & = & \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}(X)}(K, i_* L) = \mathrm{Hom}_{D^b \mathscr{M}(X)}(K, i_* L). \end{array}$$

□

Remarque 2.5 Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme. Si par hasard il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $f^*[d]$ soit t-exact et envoie $\mathscr{M}(Y)$ dans $\mathscr{M}(X)$, alors la restriction à $\mathscr{M}(Y)$ de $f^*[d]$ induit un foncteur t-exact $D^b \mathscr{M}(Y) \longrightarrow D^b \mathscr{M}(X)$, qui est un adjoint à gauche de $f_*^{\mathscr{M}}[d]$. Donc $f_*^{\mathscr{M}}$ a aussi un adjoint à gauche.

3 Les cycles proches et les cycles évanescents unipotents

On se donne toujours des catégories $\mathscr{M}(X)$ vérifient les conditions du théorème 2.1.

L'objet de cette section est de montrer que la construction, due à Beilinson et Bernstein, des foncteurs des cycles proches unipotents et des cycles évanescents unipotents, s'applique aux catégories $\mathscr{M}(X)$, et en particulier respecte les catégories $\mathscr{M}(X)$. (Nous aurons besoin des cycles évanescents pour finir de montrer que le foncteur $i_*^{\mathscr{M}}$ admet un adjoint à gauche si i est une immersion fermée.)

Cette construction a été introduite dans l'article [Beĭ1] de Beilinson, mais on suivra les notes [Rei] de Reich (voir aussi la section 5 de [Sai]). Ces notes sont écrites dans le cas d'un corps de base algébriquement clos, mais s'appliquent aussi au cas d'un corps de base quelconque, à condition de rajouter des twists à la Tate aux bons endroits (que nous indiquerons).

Soient X un schéma séparé de type fini sur E, purement de dimension d, et f un morphisme de X dans $\mathbb{A}^1_E$. On note $Y = f^{-1}(0)$, $U = X - Y$, $i : Y \longrightarrow X$ et $j : U \longrightarrow X$ les inclusions.

La construction des cycles proches unipotents utilise le produit tensoriel par certains systèmes locaux indécomposables sur U, notés $\mathscr{L}_i$ dans [Rei], et provenant de systèmes locaux sur $\mathbb{G}_{m,E}$. Pour pouvoir l'appliquer ici, il faut montrer que ces produits tensoriels ont un sens dans $\mathscr{M}(U)$. On commence par rappeler la définition des $\mathscr{L}_i$.

On choisit une clôture algébrique $\overline{E}$ de E et un isomorphisme $\pi_1(\mathbb{G}_{m,\overline{E}}) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}$. La section unité de $\mathbb{G}_{m,E}$ induit un isomorphisme $\pi_1(\mathbb{G}_{m,E}) \simeq \widehat{\mathbb{Z}} \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$, où $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ agit sur $\widehat{\mathbb{Z}}$ par la multiplication par le caractère cyclotomique χ.

Pour tout entier $i \geq 0$, on note L_i le système local de rang $i+1$ sur $\mathbb{G}_{m,E}$ donné par l'action suivante de $\pi_1(\mathbb{G}_{m,E})$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{i+1}$: le générateur 1 de $\widehat{\mathbb{Z}}$ agit par $id+A$, où $A \in \mathbf{GL}_{i+1}(\mathbb{Z})$ est le bloc de Jordan de taille $i+1$, et $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ agit par la matrice diagonale de coefficients diagonaux $1, \chi(\sigma)^{-1}, \dots, \chi(\sigma)^{-i}$. On pose $\mathscr{L}_i = f^* L_i$. Alors $\mathscr{L}_i$ est un système local indécomposable sur U, mixte de poids $0, 2, \dots, 2i$ et admettant une filtration par le poids. Si $i < j$, on a une injection évidente $\mathscr{L}_i \longrightarrow \mathscr{L}_j$ et une surjection évidente $\mathscr{L}_j \longrightarrow \mathscr{L}_i(i-j)$.

Le lemme suivant est dû à M. Saito (cf [Sai] 5.1).

Lemme 3.1 *Pour tout $K \in \mathscr{M}(X)$, le faisceau pervers $K \otimes \mathscr{L}_i$ est dans $\mathscr{M}(X)$.*

Démonstration. Le lemme est bien entendu évident pour $i = 0$, puisque $\mathscr{L}_0 = \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}$.

Il suffit de prouver que les $L_i[1]$ sont dans $\mathscr{M}(\mathbb{G}_{m,E})$. En effet, soit $u : X \longrightarrow X \times \mathbb{G}_{m,E}$ le morphisme (id_X, f). Alors, pour tout $K \in \mathscr{M}(X)$, $K \otimes \mathscr{L}_i = {}^pH^{-1} u^* K \boxtimes L_i[1]$, donc $K \otimes \mathscr{L}_i$ est dans $\mathscr{M}(X)$ (par la condition (d) du théorème 2.1 et le lemme 2.4).

Montrons donc que les $L_i[1]$ sont dans $\mathscr{M}(\mathbb{G}_{m,E})$. On suit la preuve du lemme 5.1 de [Sai]. Soient $\pi : \mathbb{G}_{m,E} \times \mathbb{G}_{m,E} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,E}$ la deuxième projection, $i_1 : \mathbb{G}_{m,E} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,E} \times \mathbb{G}_{m,E}$ le morphisme diagonal et $i_2 : \mathbb{G}_{m,E} \longrightarrow \mathbb{G}_{m,E} \times \mathbb{G}_{m,E}$ le morphisme $x \longmapsto (1, x)$.

Comme π est lisse de dimension relative 1, le foncteur $\pi^*[1]$ est t-exact. De plus, le foncteur $\pi^*[1] : \mathrm{Perv}_m(\mathbb{G}_{m,E}) \longrightarrow \mathrm{Perv}_m(\mathbb{G}_{m,E} \times \mathbb{G}_{m,E})$ est simplement $K \longmapsto \overline{\mathbb{Q}}_\ell[1] \boxtimes K$, donc il envoie $\mathscr{M}(\mathbb{G}_{m,E})$ dans $\mathscr{M}(\mathbb{G}_{m,E}\times\mathbb{G}_{m,E})$, et on dispose donc du foncteur $\pi^*_{\mathscr{M}}$ (cf la remarque 2.5). Pour $a\in\{1,2\}$, on note u_a le morphisme $\pi^{\mathscr{M}}_*\pi^*_{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell[1]\longrightarrow\pi^{\mathscr{M}}_* i^{\mathscr{M}}_{a*}i^*_{a,\mathscr{M}}\pi^*_{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell[1]\simeq\overline{\mathbb{Q}}_\ell[1]$, où la première flèche vient du morphisme $id\longrightarrow i^{\mathscr{M}}_{a*}i^*_{a,\mathscr{M}}$ (cf le lemme 2.4) et la deuxième flèche de l'égalité $\pi i_a=id$. Alors le cône du morphisme $u_1\oplus u_2:\pi^{\mathscr{M}}_*\pi^*_{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_\ell[1]\longrightarrow\overline{\mathbb{Q}}_\ell[1]\oplus\overline{\mathbb{Q}}_\ell[1]$ est concentré en degré pervers 0, et il est isomorphe à $L_1[1]$. Ceci prouve que $L_1[1]$ est dans $\mathscr{M}(\mathbb{G}_{m,E})$.

Pour obtenir L_i, on veut utiliser le fait que $L_i=\operatorname{Sym}^i L_1$. Comme $\operatorname{Sym}^i L_1$ est un facteur direct de la puissance tensorielle $\otimes^i L_1$, il suffit de montrer que $\otimes^i L_1[1]$ est dans $\mathscr{M}(\mathbb{G}_{m,E})$. On fixe $i\geq 1$. Soit $\delta:\mathbb{G}_{m,E}\longrightarrow\mathbb{G}^i_{m,E}$ le morphisme diagonal ; c'est une immersion fermée. Alors $\otimes^i L_1[1]={}^pH^{1-i}\delta^*(L_1[1]\boxtimes\cdots\boxtimes L_1[1])$, donc on a gagné (à nouveau, grâce au lemme 2.4).

□

On peut maintenant appliquer les constructions de [Rei] sections 2 et 3, qui n'utilisent, à part les produits tensoriels par les $\mathscr{L}_i$, que les foncteurs $j_!$ et j_*, des twists à la Tate, des noyaux et des conoyaux.

On obtient :

(a) Un foncteur exact $\Psi^u_f:\mathscr{M}(U)\longrightarrow\mathscr{M}(Y)$ (le foncteur des cycles proches unipotents), muni d'un morphisme fonctoriel nilpotent $N:\Psi^u_f\longrightarrow\Psi^u_f(-1)$ (la monodromie) et d'un isomorphisme fonctoriel $\Psi^u_f\circ D\simeq D\circ\Psi^u_f(1)$. On notera aussi Ψ^u_f le foncteur $\Psi^u_f\circ j^*:\mathscr{M}(X)\longrightarrow\mathscr{M}(Y)$.

(b) Un foncteur exact $\Xi_f:\mathscr{M}(U)\longrightarrow\mathscr{M}(X)$ (le foncteur “extension maximale” de Beilinson), muni lui aussi d'un morphisme fonctoriel nilpotent $N:\Xi_f\longrightarrow\Xi_f(-1)$, et des suites exactes fonctorielles

$$0\longrightarrow\Psi^u_f\longrightarrow\Xi_f\longrightarrow j_*\longrightarrow 0$$

et

$$0\longrightarrow j_!\longrightarrow\Xi_f\longrightarrow\Psi^u_f(-1)\longrightarrow 0.$$

(c) Un foncteur exact $\Phi^u_f:\mathscr{M}(X)\longrightarrow\mathscr{M}(Y)$ (le foncteur cycles évanescents unipotent), muni d'un morphisme fonctoriel nilpotent $N:\Phi^u_f\longrightarrow\Phi^u_f(-1)$ et d'un isomorphisme fonctoriel $\Phi^u_f\circ D\simeq D\circ\Phi^u_f$.

(d) Des morphismes fonctoriels $\mathrm{can}:\Psi^u_f\longrightarrow\Phi^u_f$ et $\mathrm{Var}:\Phi^u_f\longrightarrow\Psi^u_f(-1)$ tels que $\mathrm{Var}\circ\mathrm{can}=N$ et $\mathrm{can}\circ\mathrm{Var}=N$, et des suites exactes fonctorielles

$$0\longrightarrow{}^pH^{-1}i^*\longrightarrow\Psi^u_f\xrightarrow{\mathrm{can}}\Phi^u_f\longrightarrow{}^pH^0i^*\longrightarrow 0$$

et

$$0\longrightarrow{}^pH^0i^!\longrightarrow\Phi^u_f\xrightarrow{\mathrm{Var}}\Psi^u_f(-1)\longrightarrow{}^pH^1i^!\longrightarrow 0.$$

En composant la première suite exacte avec le foncteur i_*, on obtient un isomorphisme fonctoriel $\Phi^u_f i_*\xrightarrow{\sim}i^*i_*\simeq id_{\mathscr{M}(Y)}$. En composant la deuxième suite exacte avec j_*, on obtient un isomorphisme fonctoriel $\Phi^u_f j_*\xrightarrow{\sim}\Psi^u_f(-1)$.

Remarque 3.2 Pour $K \in \mathrm{Perv}_m(U)$, $\Psi_f^u(K)$ est le facteur direct du complexe des cycles proches de K où la monodromie agit de manière unipotente (cf. [Rei] 2.2). Noter qu'on a décalé de -1 le foncteur cycles proches de SGA 7 XIII afin qu'il respecte les catégories de faisceaux pervers (de même pour les cycles évanescents). On pourrait récupérer les foncteurs cycles proches et évanescents complets à partir de Ψ_f^u et Φ_f^u (cf [Rei] 4.2), mais nous n'en aurons pas besoin ici.

Remarque 3.3 La construction ci-dessus s'applique en particulier au cas où $\mathscr{M}(X) = \mathrm{Perv}_m(X)$. Grâce au fait 1.2, on en déduit des foncteurs cycles proches et évanescents (au moins unipotents) pour les catégories $D_m^b(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

4 Fin de la démonstration du théorème principal

Dans cette section, on finit la démonstration du théorème principal 2.1. Les hypothèses et notations sont donc celles de ce théorème.

Le lemme suivant est le théorème 5.6 de [Sai].

Lemme 4.1 *Soit $i : Y \longrightarrow X$ une immersion fermée. Comme dans le lemme 2.4, notons $D_Y^b\mathscr{M}(X)$ la sous-catégorie pleine de $D^b\mathscr{M}(X)$ qui a pour objets les complexes dont la cohomologie est à support dans Y.*

Alors le foncteur $i_*^{\mathscr{M}} : D^b\mathscr{M}(Y) \longrightarrow D^b\mathscr{M}(X)$ induit une équivalence de catégories $D^b\mathscr{M}(Y) \xrightarrow{\sim} D_Y^b\mathscr{M}(X)$.

Démonstration. On dispose de la t-structure naturelle sur $D^b\mathscr{M}(X)$. Considérons sa restriction à $D_Y^b\mathscr{M}(X)$. C'est aussi une t-structure, et, d'après l'hypothèse (a) du théorème 2.1, son coeur s'identifie à $\mathscr{M}(Y)$ via le foncteur $i_* : \mathscr{M}(Y) \longrightarrow \mathscr{M}(X)$. Via cette identification, le foncteur $i_*^{\mathscr{M}} : D^b\mathscr{M}(Y) \longrightarrow D_Y^b\mathscr{M}(X)$ n'est autre que le foncteur réalisation de [BBD] 3.1.10. D'après [BBD] 3.1.16, la conclusion du lemme est donc équivalente à la propriété suivante : pour tous $K, L \in \mathscr{M}(Y)$, tout entier $n > 0$ et tout morphisme $f \in \mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(X)}(i_*K, i_*L[n])$, il existe un monomorphisme $L \longrightarrow L'$ dans $\mathscr{M}(Y)$ qui efface f (i.e., tel que l'image de f dans $\mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(X)}(i_*K, i_*L'[n])$ soit 0).

Soit $j : U \longrightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire de i. Supposons que l'on connaît le résultat dans le cas où X est affine, et montrons le cas général. Soit $(j_k : U_k \longrightarrow X)_{k \in I}$ un recouvrement ouvert affine de X. Pour tout k, on note $i_k : Y \cap U_k \longrightarrow U_k$ et $a_k : Y \cap U_k \longrightarrow Y$ les immersions (qui sont affines, la première parce qu'elle est fermée et la deuxième parce que U_k est affine). Soient $K, L \in \mathscr{M}(Y)$, $n > 0$ un entier et $f \in \mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(X)}(i_*K, i_*L[n])$. On a un monomorphisme $L \longrightarrow \bigoplus_k a_{k*}a_k^* L$, d'où un morphisme

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(X)}(i_*K, i_*L[n]) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(X)}(i_*K, \bigoplus_{k\in I} i_*a_{k*}a_k^*L[n]) \\ &= \bigoplus_{k\in I} \mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(U_k)}(i_{k*}a_k^*K, i_{k*}a_k^*L[n]).\end{aligned}$$

On note $(f_k)_{k\in I}$ l'image par f de ce morphisme. D'après l'hypothèse qu'on vient de faire, pour tout $k \in I$, il existe un monomorphisme $a_k^*L \longrightarrow L_k$ dans $\mathscr{M}(Y \cap U_k)$ qui efface f_k. Alors le morphisme $L \longrightarrow \bigoplus_k a_{k*}L_k$ est un monomorphisme, et il efface f.

On peut donc supposer que X est affine. Alors Y est défini par l'annulation d'un nombre fini de fonctions $X \longrightarrow \mathbb{A}^1_E$. On raisonne par récurrence sur le nombre de fonctions nécessaires pour définir Y.

Supposons d'abord qu'il existe $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_E$ telle que $Y = f^{-1}(0)$. Dans ce cas, le foncteur exact $\Phi_f^u : \mathscr{M}(X) \longrightarrow \mathscr{M}(Y)$, étendu de manière évidente à $D^b\mathscr{M}(X)$, induit un quasi-inverse de $i_*^{\mathscr{M}} : D^b\mathscr{M}(Y) \longrightarrow D^b_Y\mathscr{M}(X)$.

Supposons maintenant que Y est défini par l'annulation de k fonctions $f_1, \dots, f_k : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_E$, avec $k \geq 2$. On pose $Y' = f_1^{-1}(0)$, et on note $i_1 : Y \longrightarrow Y'$ et $i_2 : Y' \longrightarrow X$ les immersions. Soient $K, L \in \mathscr{M}(Y)$, $n > 0$ un entier et $f \in \mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(X)}(i_*K, i_*L[n])$. D'après l'hypothèse de récurrence, $i_{2*}^{\mathscr{M}}$ induit une équivalence de catégories $D^b\mathscr{M}(Y') \longrightarrow D^b_{Y'}\mathscr{M}(X)$, donc on a

$$\mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(X)}(i_*K, i_*L[n]) = \mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(Y')}(i_{1*}K, i_{1*}L[n]).$$

Toujours d'après l'hypothèse de récurrence (appliquée cette fois à $i_1 : Y \longrightarrow Y'$), il existe un monomorphisme $L \longrightarrow L'$ dans $\mathscr{M}(Y)$ tel que l'image de f dans $\mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(Y')}(i_{1*}K, i_{1*}L'[n])$ est nulle. Comme

$$\mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(Y')}(i_{1*}K, i_{1*}L'[n]) = \mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(X)}(i_*K, i_*L'[n]),$$

ceci finit la preuve.

□

Lemme 4.2 *Soit* $i : Y \longrightarrow X$ *une immersion fermée. Alors le foncteur* $i_*^{\mathscr{M}} : D^b\mathscr{M}(Y) \longrightarrow D^b\mathscr{M}(X)$ *admet un adjoint à gauche.*

Démonstration. Ceci résulte du lemme 4.1 ci-dessus et du lemme 2.4.

□

Pour finir de prouver le théorème principal, il faut montrer l'existence des foncteurs $f^*_{\mathscr{M}}$ et $f^!_{\mathscr{M}}$ pour f quelconque. En fait, grâce à la dualité, il suffit de traiter le cas de $f^*_{\mathscr{M}}$. On veut utiliser la méthode de Saito dans la section 3 de [Sai] : Pour $f : X \longrightarrow Y$, on écrit $f = gi$, où $g : X \times Y \longrightarrow Y$ est la deuxième projection et $i : X \longrightarrow X \times Y$ est le graphe de f (une immersion fermée). Le cas de i est connu par le lemme ci-dessus, donc il reste à traiter celui de g. On veut poser $g^*_{\mathscr{M}} K = \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X} \boxtimes^{\mathscr{M}} K$. Le seul problème est qu'on ne dispose pas a priori de l'objet $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}$ dans $D^b\mathscr{M}(X)$. Toute la difficulté consiste donc à construire un tel objet (ayant les bonnes propriétés). Le lemme suivant finit la preuve du théorème principal.

Lemme 4.3 *Soit $a : X \longrightarrow \operatorname{Spec} E$ un schéma séparé de type fini sur E. Alors le foncteur de $D^b\mathscr{M}(X)$ dans la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espaces vectoriels défini par $K \longmapsto \operatorname{Hom}_{D^b\mathscr{M}(\operatorname{Spec} E)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell, a^{\mathscr{M}}_* K)$ est représentable par un objet $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,X} \in D^b\mathscr{M}(X)$ et un morphisme $\varphi_X : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow a^{\mathscr{M}}_* \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,X}$. De plus, les images de cet objet et de ce morphisme par η sont $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X} \in D^b_m(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et le morphisme d'adjonction $\overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow a_*\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}$.*

Démonstration. Supposons d'abord que X est lisse purement de dimension d. Alors, par hypothèse, $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}[d] \in \mathscr{M}(X)$, et on prend $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,X} = (\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}[d])[-d]$. Le complexe $a^{\mathscr{M}}_* \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,X}$ est concentré en degré ≥ 0 (puisque son image par η l'est), donc

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{D^b\mathscr{M}(\operatorname{Spec} E)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell, a^{\mathscr{M}}_* \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,X}) &= \operatorname{Hom}_{\mathscr{M}(\operatorname{Spec} E)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell, H^0 a^{\mathscr{M}}_* \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,X}) \\
&= \operatorname{Hom}_{\operatorname{Perv}_m(\operatorname{Spec} E)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell, {}^pH^0 a_* \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}) \\
&= \operatorname{Hom}_{D^b_m(\operatorname{Spec} E)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell, a_* \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}),
\end{aligned}$$

et on prend pour φ_X le morphisme correspondant au morphisme d'adjonction par ces identifications.

Supposons maintenant que X est affine. Alors il existe une immersion fermée $i : X \longrightarrow \mathbb{A}^d_E$. On note $\pi : Y := \mathbb{A}^d_E \longrightarrow \operatorname{Spec} E$ la projection évidente, qui est lisse de dimension relative d. On pose $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,X} = i^*_{\mathscr{M}} \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,Y}$, et on prend pour $\varphi_X : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow a^{\mathscr{M}}_* \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,X} = \pi^{\mathscr{M}}_* i^{\mathscr{M}}_* i^*_{\mathscr{M}} \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,Y}$ le composé de $\varphi_Y : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow \pi^{\mathscr{M}}_* \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,Y}$ et du morphisme d'adjonction $\pi^{\mathscr{M}}_* \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,Y} \longrightarrow \pi^{\mathscr{M}}_* i^{\mathscr{M}}_* i^*_{\mathscr{M}} \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,Y}$.

Dans le cas général, on raisonne par récurrence sur le nombre d'ouverts affines nécessaires pour recouvrir X. On se ramène ainsi au cas où il existe deux ouverts U_1 et U_2 de X tels que $X = U_1 \cup U_2$ et que la conclusion du lemme soit connue pour U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$ (en fait, le cas de $U_1 \cap U_2$ résulte de celui de U_1, puisque l'on sait former les images inverses par des immersions ouvertes). On note $j_1 : U_1 \longrightarrow X$, $j_2 : U_2 \longrightarrow X$, $j_{12} : U_{12} := U_1 \cap U_2 \longrightarrow X$, $k_1 : U_{12} \longrightarrow U_1$ et $k_2 : U_{12} \longrightarrow U_2$ les immersions.

On va définir $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,X}$ comme l'unique objet de $D^b\mathscr{M}(X)$ dont la restriction à U_1 (resp. U_2) est $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,U_1}$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,U_2}$).

On note donc $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,X}$ un cône du morphisme $f : j^{\mathscr{M}}_{12!} \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,U_{12}} \longrightarrow j^{\mathscr{M}}_{1!} \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,U_1} \oplus j^{\mathscr{M}}_{2!} \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,U_2}$, où f est la différence des morphismes d'adjonction (noter que $\overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,U_{12}}$ est canoniquement isomorphe à $k^*_{1,\mathscr{M}} \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,U_1}$ et à $k^*_{2,\mathscr{M}} \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,U_2}$). En appliquant les foncteurs $j^*_{1,\mathscr{M}}$ et $j^*_{2,\mathscr{M}}$ au triangle distingué

$$j^{\mathscr{M}}_{12!} \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,U_{12}} \longrightarrow j^{\mathscr{M}}_{1!} \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,U_1} \oplus j^{\mathscr{M}}_{2!} \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,U_2} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}^{\mathscr{M}}_{\ell,X} \xrightarrow{+1},$$

on obtient des isomorphismes évidents $u_1 : \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_1}^{\mathscr{M}} \xrightarrow{\sim} j_{1,\mathscr{M}}^{*}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}^{\mathscr{M}}$ et $u_2 : \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_2}^{\mathscr{M}} \xrightarrow{\sim} j_{2,\mathscr{M}}^{*}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}^{\mathscr{M}}$.

Montrons le fait suivant : Soit $K \in D^b\mathscr{M}(X)$ muni d'isomorphismes $v_i : \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_i}^{\mathscr{M}} \xrightarrow{\sim} j_{i,\mathscr{M}}^{*}K$ pour $i = 1, 2$, tels que les deux isomorphismes $\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_{12}}^{\mathscr{M}} \xrightarrow{\sim} j_{12,\mathscr{M}}^{*}K$ induits par v_1 et v_2 soient égaux. Alors il existe un unique morphisme $w : \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}^{\mathscr{M}} \longrightarrow K$ tel que $j_{1,\mathscr{M}}^{*}w = v_1u_1$ et $j_{2,\mathscr{M}}^{*}w = v_2u_2$, et w est un isomorphisme.

Le fait que w soit un isomorphisme s'il existe étant clair, montrons l'existence de w. Les isomorphismes v_1 et v_2 induisent par adjonction des morphismes $j_{i!}^{\mathscr{M}}j_{i,\mathscr{M}}^{*}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_i}^{\mathscr{M}} \longrightarrow K$ pour $i = 1, 2$, et on note $g : j_{1!}^{\mathscr{M}}j_{1,\mathscr{M}}^{*}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_1}^{\mathscr{M}} \oplus j_{2!}^{\mathscr{M}}j_{2,\mathscr{M}}^{*}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_2}^{\mathscr{M}} \longrightarrow K$ la somme de ces morphismes. Alors $fg = 0$ d'après l'hypothèse de compatibilité sur v_1 et v_2, donc il existe $w : \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}^{\mathscr{M}} \longrightarrow K$ qui fait commuter le diagramme évident, et il est facile de vérifier que w se restreint bien aux morphismes v_1u_1 et v_2u_2 sur U_1 et U_2.

En particulier, le fait ci-dessus montre que le cône de f est unique à isomorphisme unique près.

On considère maintenant le cône C du morphisme $h : j_{1*}^{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_1}^{\mathscr{M}} \oplus j_{2*}^{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_2}^{\mathscr{M}} \longrightarrow j_{12*}^{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_{12}}^{\mathscr{M}}$, où h est la différence des morphismes d'adjonction. Alors $C[-1]$ vérifie les conditions du fait ci-dessus, donc on a un isomorphisme canonique $C[-1] \simeq \overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}^{\mathscr{M}}$, d'où un triangle distingué

$$a_*^{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}^{\mathscr{M}} \longrightarrow (aj_1)_*^{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_1}^{\mathscr{M}} \oplus (aj_2)_*^{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_2}^{\mathscr{M}} \longrightarrow (aj_{12})_*^{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_{12}}^{\mathscr{M}} \xrightarrow{+1} .$$

Comme de plus $a_*^{\mathscr{M}}h\circ(\varphi_{U_1}\oplus\varphi_{U_2}) = 0$, la flèche $\varphi_{U_1}\oplus\varphi_{U_2} : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow (aj_1)_*^{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_1}^{\mathscr{M}} \oplus (aj_2)_*^{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_2}^{\mathscr{M}}$ se factorise par une flèche $\varphi_X : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \longrightarrow a_*^{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,X}^{\mathscr{M}}$. Cette flèche φ_X est uniquement déterminée, puisque, $(aj_{12})_*^{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_{12}}^{\mathscr{M}}$ étant concentré en degré > 0, on a $\mathrm{Hom}_{D^b\mathscr{M}(\mathrm{Spec}\,E)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell, (aj_{12})_*^{\mathscr{M}}\overline{\mathbb{Q}}_{\ell,U_{12}}^{\mathscr{M}}) = 0$.

Pour montrer que φ_X vérifie bien la propriété du lemme, on utilise le triangle distingué fonctoriel

$$a_*^{\mathscr{M}} \longrightarrow (aj_1)_*^{\mathscr{M}}j_{1,\mathscr{M}}^{*} \oplus (aj_2)_*^{\mathscr{M}}j_{2,\mathscr{M}}^{*} \longrightarrow (aj_{12})_*^{\mathscr{M}}j_{12,\mathscr{M}}^{*} \xrightarrow{+1}$$

(où la première flèche est la somme des flèches d'adjonction et la deuxième flèche la différence des flèches d'adjonction) et le lemme des cinq.

□

5 Faisceaux pervers mixtes avec filtration par le poids

On montre ici au'on peut simplement prendre pour $\mathscr{M}(X)$ la catégorie des faisceaux pervers mixtes sur X admettant une filtration par le poids.

Proposition 5.1 *Pour tout schéma séparé de type fini X sur E, on prend pour $\mathscr{M}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Perv}_m(X)$ formée des faisceaux pervers mixtes admettant une filtration par le poids. Alors ces catégories vérifient les conditions du théorème 2.1.*

Démonstration. La stabilité par dualité est claire, ainsi que les conditions (a), (b) et (d).

D'après [Hub] 3.9, si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme propre, alors les ${}^{P}H^k f_*$ envoient $\mathscr{M}(X)$ dans $\mathscr{M}(Y)$. (Huber suppose que f est propre et lisse, mais la preuve de sa proposition 3.9 n'utilise que le fait que f_* envoie un complexe pur sur un complexe pur du même poids, et cela est vrai dès que f est propre.)

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme affine. On peut écrire f comme un composé $X \xrightarrow{i} \mathbb{A}^n_Y \longrightarrow Y$, où le premier morphisme est une immersion fermée et le deuxième est le morphisme évident. Soient j l'immersion ouverte de $\mathbb{A}^n_Y$ dans $\mathbb{P}^n_Y$ et π le morphisme évident de $\mathbb{P}^n_Y$ dans Y. Alors $f = \pi j i$. Comme j est affine, ji l'est aussi, donc le foncteur $(ji)_*$ est t-exact, et on a ${}^{p}H^k f_* = {}^{p}H^k \pi_* \circ (ji)_*$ pour tout k. D'après la remarque ci-dessus sur les morphismes propres, il suffit de montrer que $(ji)_*$ envoie $\mathscr{M}(X)$ dans $\mathscr{M}(\mathbb{P}^n_Y)$. Comme i est une immersion fermée, i_* préserve les poids, donc il est évident que i_* envoie $\mathscr{M}(X)$ dans $\mathscr{M}(\mathbb{A}^n_Y)$. Finalement, on s'est donc ramené au cas où f est une immersion ouverte affine.

Soit $j : U \longrightarrow X$ une immersion ouverte affine. Comme le problème est local sur X (d'après le lemme 5.4), on peut supposer qu'il existe un morphisme $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_E$ tel que $X - U = f^{-1}(0)$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 5.3 ci-dessous.

□

Proposition 5.2 *Soient X un schéma séparé de type fini sur E et f un morphisme de X dans $\mathbb{A}^1_E$. On note $Y = f^{-1}(0)$ et $U = X - Y$. Alors le foncteur des cycles proches unipotents Ψ^u_f envoie $\mathscr{M}(U)$ dans $\mathscr{M}(Y)$.*

Démonstration. Soit $K \in \mathscr{M}(U)$ pur de poids w. D'après le théorème 5.1.2 de [BB] (dû à Gabber), la filtration de monodromie M induite par $N : \Psi^u_f K \longrightarrow \Psi^u_f K(-1)$ est telle que $Gr^M_i \Psi^u_f K$ est pur de poids $w - 1 + i$ pour tout i. La proposition résulte donc du lemme 5.5, appliqué au foncteur exact Ψ^u_f et N.

□

Corollaire 5.3 *Avec les hypothèses et notations de la proposition ci-dessus, soit $j : U \longrightarrow X$ l'inclusion. Alors $j_!$ et j_* envoient $\mathscr{M}(U)$ dans $\mathscr{M}(X)$.*

Démonstration. Il suffit de prouver le corollaire pour j_*, le cas de $j_!$ s'en déduisant par dualité.

Soit $K \in \mathscr{M}(U)$, et soit W sa filtration par le poids. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Il s'agit de trouver un sous-objet L de j_*K tel que L soit de poids $\leq a$ et j_*K/L soit de poids $> a$.

Si $W_aK = 0$, alors j_*K est de poids $> a$, donc on peut prendre $L = 0$.

Si $W_aK = K$, alors K est de poids $\leq a$, donc $j_{!*}K$ est de poids $\leq a$ ([BBD], 5.4.3). Il suffit donc de trouver un sous-objet L' de poids $\leq a$ de $j_*K/j_{!*}K$ tel que $(j_*K/j_{!*}K)/L'$ soit de poids $> a$. Or $j_*K/j_{!*}K = i_*{}^pH^0i^*j_*K$ est un quotient de $i_*\Psi_f^uK(-1)$. Comme $\Psi_f^uK(-1)$ admet une filtration par le poids d'après la proposition ci-dessus, il en est de même de $j_*K/j_{!*}K$.

Supposons donc que $0 \neq W_aK \neq K$. On note $K' = W_aK$ et $K'' = K/W_aK$. D'après le deuxième cas, il existe $L' \subset j_*K'$ de poids $\leq a$ et tel que j_*K'/L' soit de poids $> a$. Comme on a une suite exacte $0 \longrightarrow j_*K' \longrightarrow j_*K \longrightarrow j_*K'' \longrightarrow 0$ et que j_*K'' est de poids $> a$, on peut prendre $L = L'$.

□

Lemme 5.4 *Soient X un schéma séparé de type fini sur E et $K \in \mathrm{Perv}_m(X)$. Alors $K \in \mathscr{M}(X)$ si et seulement s'il existe un recouvrement étale $(u_i : U_i \longrightarrow X)_{i\in I}$ de X tel que $u_i^* \in \mathscr{M}(U_i)$ pour tout $i \in I$.*

Démonstration. La direction "seulement si" est évidente. L'autre direction résulte de l'unicité de la filtration par le poids (lorsqu'elle existe) et du fait que les faisceaux pervers forment un champ (cf [BBD] 2.2.19).

□

Lemme 5.5 *Soient X et Y des schémas séparés de type fini sur E, G un foncteur exact de $\mathrm{Perv}_m(X)$ dans $\mathrm{Perv}_m(Y)$ et N un endomorphisme fonctoriel de G dans $G(-1)$. On suppose que :*

(a) Pour tout K dans $\mathrm{Perv}_m(X)$, le morphisme $N_K : G(K) \longrightarrow G(K)(-1)$ est nilpotent.

(b) Il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que, si K est pur de poids w et si M est la filtration de monodromie de N_K (cf [Del] 1.6.1), alors $Gr_i^M G(K)$ est pur de poids $a + w + i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. (On suppose donc en particulier que $G(K)$ a une filtration par le poids.)

Soit K dans $\mathrm{Perv}_m(X)$ admettant une filtration par le poids $(W_iK)_{i\in\mathbb{Z}}$. On définit une filtration croissante F sur $G(K)$ par $F_iG(K) = F(W_iK)$. Alors la filtration de monodromie M de N_K relativement à F (cf [Del] 6.1.13) existe, et $Gr_i^M G(K)$ est pur de poids $a + i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. En particulier, $G(K)$ a une filtration par le poids.

Ce résultat n'est guère étonnant : le fait que, pour un faisceau lisse $\mathscr{L}$, la filtration de monodromie, relativement à la filtration provenant de la filtration par le poids de $\mathscr{L}$, sur les cycles proches le long d'un diviseur lisse est égale à la filtration par le poids est le corollaire 1.8.7 de l'article [Del] de Deligne.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la longueur de la filtration W. Soit $b \in \mathbb{Z}$ tel que $W_b K = K$ et $Gr_b^W K \neq 0$. Grâce à l'hypothèse de récurrence et à l'hypothèse (b) ci-dessus, on peut suppose que la conclusion du lemme est vraie pour $W_{b-1}K$ et $Gr_b^W K$. Pour alléger les notations, on supposera dans la suite que $a = b = 0$; cela ne change pas le raisonnement. On note $L = G(K)$ et $N = N_K : L \longrightarrow L(-1)$.

On dispose donc de filtrations de monodromie relatives M sur $F_{-1}L$ et $Gr_0^F L$. D'après le preuve de [Del] 1.6.13, une filtration de monodromie relative M sur L vérifie nécessairement les conditions suivantes :

(1) $M_{-i}L = M_{-i}F_{-1}L$ pour i assez grand ;

(2) pour tout $i \geq 0$, $M_i L = \mathrm{Ker}(N^{i+1} : L \longrightarrow L/M_{-i-2}L(-i-1))$;

(3) pour tout $i \geq 0$, $M_{-i}L = M_{-i}F_{-1}L + N^i M_i L(i)$.

Ces conditions définissent, par récurrence descendante sur $|i|$, une unique filtration M sur L. Il s'agit de montrer que cette filtration vérifie les conditions caractérisant la filtration de monodromie relative sur L.

Montrons, par récurrence descendante sur $|i|$, que la suite suivante

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow M_i F_{-1}L \longrightarrow M_i L \longrightarrow M_i Gr_0^F L \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout i.

C'est évident si i est assez grand. Soit $i \geq 0$, supposons le résultat connu pour $-i-2$ et montrons-le pour i. Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes (la deuxième ligne est exacte par l'hypothèse de récurrence) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F_{-1}L \arrow[r] \arrow[d, "N^{i+1}"'] & L \arrow[r] \arrow[d, "N^{i+1}"'] & Gr_0^F L \arrow[r] \arrow[d, "N^{i+1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (F_{-1}L/M_{-i-2}F_{-1}L)(-i-1) \arrow[r] & (L/M_{-i-2}L)(-i-1) \arrow[r] & (Gr_0^F L/M_{-i-2}Gr_0^F L)(-i-1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme du serpent et le point (2) ci-dessus, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow M_i F_{-1}L \longrightarrow M_i L \longrightarrow M_i Gr_0^F L \longrightarrow C,$$

avec $C = \mathrm{Coker}(N^{i+1} : F_{-1}L \longrightarrow (F_{-1}L/M_{-i-2}F_{-1}L)(-i-1))$. D'après l'hypothèse de récurrence (sur la longueur de W), $M_i Gr_0^F L$ est de poids $\leq i$ et $(F_{-1}L/M_{-i-2}F_{-1}L)(-i-1)$ est de poids $\geq -i-1+2(i+1) = i+1$. Le flèche $M_i Gr_0^F L \longrightarrow C$ est donc nulle, et on obtient le résultat pour i.

Soit maintenant $i \geq 0$, supposons le résultat connu pour i et montrons-le pour $-i$. Montrons d'abord que $M_{-i}L \cap F_{-1}L = M_{-i}F_{-1}L$. On a $M_{-i}L = M_{-i}(F_{-1}L) + N^i(M_i L)(i)$ par le point (3) ci-dessus, donc $M_{-i}L \cap F_{-1}L \supset M_{-i}F_{-1}L$. On sait que $M_{-i}F_{-1}L$ est de poids $\leq -i$ et que $M_i F_{-1}L$ et $M_i Gr_0^F L$ sont de poids $\leq i$ d'après l'hypothèse de récurrence (sur la longueur de W). De plus, d'après l'hypothèse de récurrence sur i, $M_i L$ est une extension de $M_i Gr_0^F L$ par $M_i F_{-1}L$, donc $M_i L$ est aussi de poids $\leq i$, et $N^i(M_i L)(i)$ est de poids $\leq -i$. On en déduit que

$M_{-i}L$ est de poids $\leq -i$. Il en est de même pour son intersection avec $F_{-1}L$. Comme la filtration M sur $F_{-1}M$ coïcide avec la filtration par le poids, on a $M_{-i}L \cap F_{-1}L \subset M_{-i}F_{-1}L$.

L'inclusion $M_{-i}L \subset L$ induit donc un morphisme injectif $u : M_{-i}L/M_{-i}F_{-1}L \longrightarrow Gr_0^F L$. Il reste à montrer que l'image de u est $M_{-i}Gr_0^F L$. Ceci résulte de la définition de $M_{-i}L$, de la surjectivité de $M_iL \longrightarrow M_iGr_0^F L$ et du fait que $M_{-i}Gr_0^F L = N^i M_i Gr_0^F L(i)$.

Ceci finit la preuve de l'exactitude la suite $(*)$. Cette exactitude implique l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow F_{-1}L/M_iF_{-1}L \longrightarrow L/M_iL \longrightarrow Gr_0^F L/M_iGr_0^F L \longrightarrow 0.$$

Comme la filtration M sur $F_{-1}L$ et sur $Gr_0^F L$ est la filtration par le poids, pour tout i, M_iL est de poids $\leq i$ et L/M_iL est de poids $> i$. Autrement dit, la filtration M sur L est la filtration par le poids.

Il reste à vérifier que M est aussi la filtration de monodromie relative sur L. Pour tout i, $N(M_iL)$ est de poids $\leq i$, donc il est contenu dans $M_{i-2}L(-1)$. Comme la filtration par le poids est strictement compatible aux morphismes de $\mathrm{Perv}_m(Y)$, les bigradués $Gr_{i+k}^M Gr_i^F L$ coïncident avec les bigradués de $F_{-1}L$ (si $i \leq -1$) ou de $Gr_0^F L$ (si $i \geq 0$). Il résulte donc de l'hypothèse de récurrence que N^k induit des isomorphismes $Gr_{i+k}^M Gr_i^F \xrightarrow{\sim} Gr_{i-k}^M Gr_i^F(-k)$.

□

6 Application à la filtration par le poids sur les complexes

Pour tout schéma séparé de type fini X sur E, on fixe une sous-catégorie abélienne pleine $\mathscr{M}(X)$ de $\mathrm{Perv}_m(X)$ telle que tout objet de $\mathscr{M}(X)$ admette une filtration par le poids. Pour tout $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, on note ${}^w\mathrm{D}^{\leq a}(X)$, ou ${}^w\mathrm{D}^{\leq a}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur X (resp. ${}^w\mathrm{D}^{\geq a}(X)$ ou ${}^w\mathrm{D}^{\geq a}$), la sous-catégorie pleine de $\mathrm{D}^b\mathscr{M}(X)$ dont les objets sont les $K \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{D}^b\mathscr{M}(X)$ tels que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, H^iK soit de poids $\leq a$ (resp. $\geq a$). Les catégories ${}^w\mathrm{D}^{\leq a}(X)$ et ${}^w\mathrm{D}^{\geq a}(X)$ sont des sous-catégories triangulées de $\mathrm{D}^b\mathscr{M}(X)$.

Proposition 6.1 *Pour tout $a \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, $({}^w\mathrm{D}^{\leq a}, {}^w\mathrm{D}^{\geq a+1})$ est une t-structure sur $\mathrm{D}^b\mathscr{M}(X)$.*

On note $w_{\leq a}$ et $w_{\geq a+1}$ les foncteurs de troncature pour cette t-structure. Ils étendent les foncteurs exacts sur $\mathscr{M}(X)$ donnés par $K \longmapsto W_aK$ et $K \longmapsto K/W_aK$, où W est la filtration par le poids.

Démonstration. Les preuves des lemmes 3.2.1 et 3.2.2 de [Mor] s'appliquent sans modifications une fois qu'on a le lemme ci-dessous.

□

Lemme 6.2 *Soient $K, L \in \operatorname{Ob} \mathscr{M}(X)$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que K soit de poids $\leq a$ et L de poids $\geq a+1$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$,*

$$\operatorname{Ext}^i_{\mathscr{M}(X)}(K, L) = 0.$$

Remarque 6.3 Ce lemme est une conséquence du lemme 6.9 de [Sai]. Cependant, la preuve de Saito utilise la semi-simplicité des objets purs de $\mathscr{M}(X)$, et nous n'avons pas fait cette hypothèse (car elle n'est pas vérifiée dans les cas qui nous intéressent).

Démonstration. Il est évident que $\operatorname{Ext}^i_{\mathscr{M}(X)}(K, L) = 0$ si $i < 0$, et on a $\operatorname{Hom}_{\mathscr{M}(X)}(K, L) = 0$ d'après la remarque entre 3.6 et 3.7 de [Hub].

On note W la filtration par le poids sur les objets de $\mathscr{M}(X)$.

Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Soit $\alpha \in \operatorname{Ext}^i_{\mathscr{M}(X)}(K, L)$. On choisit une suite exacte

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{u_i} M_{i-1} \xrightarrow{u_{i-1}} \dots \xrightarrow{u_1} M_0 \xrightarrow{u_0} K \longrightarrow 0$$

qui représente α (cf [Ver] III 3.2). Comme les filtrations par le poids sont strictement compatibles aux morphismes (lemme 3.8 de [Hub]), on a une suite exacte

$$0 = W_a L \longrightarrow W_a M_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow W_a M_0 \longrightarrow W_a K = K \longrightarrow 0,$$

d'où un morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M_i \arrow[r] & M_{i-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & M_0 \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "(id,0)"'] \arrow[u, equal] & L \oplus W_a M_i \arrow[r, "(0,u_{i-1})"'] \arrow[u, "(u_i, \mathrm{can})"'] & W_a M_{i-1} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{can}"'] & \cdots \arrow[r] & W_a M_0 \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{can}"'] & K \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

(can sont les inclusions canoniques). Donc α est aussi représenté par la deuxième ligne, et par conséquent $\alpha = 0$.

□

Corollaire 6.4 *On suppose de plus que les catégories $\mathscr{M}(X)$ vérifient les conditions du théorème 2.1 (par exemple, on peut prendre les catégories considérées dans la section 5). Alors les résultats des sections 3 et 5.1 de [Mor] sont encore vrais dans ce cadre. En particulier, si $j : U \longrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert non vide et $K \in \operatorname{Ob} \mathscr{M}(U)$ est pur de poids a, alors les flèches canoniques*

$$w_{\geq a} j_! K \longrightarrow j_{!*} K \longrightarrow w_{\leq a} j_* K$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. Les preuves de [Mor] s'appliquent sans modification.

□

Références

[BB] A. A. Beĭlinson and J. Bernstein. A proof of Jantzen conjectures. In *I. M. Gel′fand Seminar*, volume 16 of *Adv. Soviet Math.*, pages 1–50. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[BBD] A. A. Beĭlinson, J. Bernstein, and P. Deligne. Faisceaux pervers. In *Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981)*, volume 100 of *Astérisque*, pages 5–171. Soc. Math. France, Paris, 1982.

[Beĭ1] A. A. Beĭlinson. How to glue perverse sheaves. In *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, volume 1289 of *Lecture Notes in Math.*, pages 42–51. Springer, Berlin, 1987.

[Beĭ2] A. A. Beĭlinson. On the derived category of perverse sheaves. In *K-theory, arithmetic and geometry (Moscow, 1984–1986)*, volume 1289 of *Lecture Notes in Math.*, pages 27–41. Springer, Berlin, 1987.

[Del] Pierre Deligne. La conjecture de Weil. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (52) :137–252, 1980.

[Hub] Annette Huber. Mixed perverse sheaves for schemes over number fields. *Compositio Math.*, 108(1) :107–121, 1997.

[Mor] Sophie Morel. Complexes pondérés sur les compactifications de Baily-Borel : le cas des variétés de Siegel. *J. Amer. Math. Soc.*, 21(1) :23–61 (electronic), 2008.

[Rei] Ryan Reich. Notes on beilinson's "how to glue perverse sheaves". *J. Singul.*, 1 :94–115, 2010.

[Sai] Morihiko Saito. On the formalism of mixed sheaves, 1991.

[Ver] Jean-Louis Verdier. Des catégories dérivées des catégories abéliennes. *Astérisque*, (239) :xii+253 pp. (1997), 1996. With a preface by Luc Illusie, Edited and with a note by Georges Maltsiniotis.