Young Algebra Seminar

Lunedí 12 Gennaio, 2004
2:30–3:30 pm
Tor Vergata, stanza 2003

Algebre di vertice conformi

Sommario

- idee fisiche
- algebre conformi e algebre di vertice
- algebre conformi "non–lineari"
- classificazione di algebre di vertice conformi finitamente generate

Lucidi a disposizione presso il sito web:

http://www.math.harvard.edu/∼desole/

Riassunto di teoria quantistica dei campi

Lo spazio degli stati è uno spazio di Hilbert V.

Lo stato di vuoto è un elemento $|0\rangle \in V$.

Le osservabili fisiche sono distribuzioni a valori operatori, $\Phi(x) \in \mathrm{End}V$, detti campi quantistici.

Principio di relatività:

Nessun segnale puó viaggiare a velocità superiore alla velocità della luce $c = 1$.

Se $x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$ sono a distanza di tipo spaziale,

$$|x-y|^2 < 0 \qquad (\Leftrightarrow v = |x_1 - y_1|/|x_0 - y_0| > 1)$$

le osservabili $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ sono indipendenti.

Principio di indeterminazione:

Se due osservabili $\Phi(x)$ e $\Psi(y)$ sono indipendenti, allora:

$$[\Phi(x), \Psi(y)] = 0$$

Specializzazione in dimensione $d+1=2$

Effettuiamo un cambio di variabili:

$$z = x_0 - x_1 \quad \bar{z} = x_0 + x_1 \ , \quad \Rightarrow \quad |x|^2 = z\bar{z}$$

I principi di relatività + indeterminazione implicano l'equazione di località:

$$(z-w)(\bar{z}-\bar{w}) < 0 \ \Rightarrow \ [\Phi(z,\bar{z}),\Psi(w,\bar{w})] = 0 \qquad (*)$$

Campi chirali

Un campo $\Phi(z,\bar{z})$ è detto campo chirale se dipende solo da z e non da $\bar{z}$:

$$\partial_{\bar{z}}\Phi(z,\bar{z}) = 0$$

L'equazione di località (*) per campi chirali si riscrive:

$$z - w \neq 0 \quad \Rightarrow \quad [\Phi(z),\Psi(w)] = 0$$

Cioè il commutatore $[\Phi(z),\Psi(w)]$ è concentrato sulla diagonale $z=w$. Una formulazione equivalente dell'equazione di località è data da:

$$(z-w)^N[\Phi(z),\Psi(w)] \ = \ 0$$

Operatori di creazione e distruzione

Un campo chirale si scrive come serie (formale):

$$\Phi(z) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi_n z^n \;, \quad \Phi_n \in \mathrm{End}V$$

$\Phi_n,\; n<0$ sono operatori di distruzione $(v \in V)$:

$$\Phi_n|0\rangle = 0 \;,\; \forall n < 0 \quad ; \quad \Phi_n v = 0 \;,\;\; \forall n << 0,$$

$\Phi_n,\; n \geq 0$ sono operatori di creazione:

$$\Phi_n|0\rangle \;=\; |\Phi_n\rangle \;\neq\; 0 \;,\; \forall n \geq 0$$

Equivalentemente, $\Phi(z)|0\rangle$ è una *serie di Taylor* in z (solo potenze non negative di z), mentre $\Phi(z)v,\; v \in V$ è una *serie di Laurent* in z (con un numero finito di potenze negative in z)

Algebre di vertice

V: spazio vettoriale, $|0\rangle \in V$.

Def 1 Un campo $\Phi(z)$ su V è una serie formale in z con coefficienti in End$V$:

$$\Phi(z) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Phi_n z^n \;\in\; \mathrm{End}V[[z, z^{-1}]]$$

tale che $\Phi(z)|0\rangle$ è una serie di Taylor in z, e $\Phi(z)v$ è una serie di Laurent in z per ogni $v \in V$.

Def 2 Due campi $(\Phi(z), \Psi(w))$ sono detti locali se soddisfano l'equazione di località

$$(z-w)^N[\Phi(z), \Psi(w)] \;=\; 0 \qquad \text{per } N >> 0$$

Definizione Un algebra di vertice è (piú o meno) una collezione

$$\mathcal{F} \;=\; \{\Phi^\alpha(z)\ ,\ \ \alpha \in \mathcal{A}\}$$

di campi a due a due locali.

Esempi

Esempio 1: correnti

$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}K$: algebra di Kac–Moody affine, con bracket di Lie

$$[at^m, bt^n] \;=\; [a,b]t^{m+n} + m\delta_{m,-n}(a|b)K$$

Campi (su una rappr. V di $\hat{\mathfrak{g}}$ di peso massimo):

$$a(z) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} (at^n) z^{-n-1}\,, \qquad a \in \mathfrak{g}$$

Località, garantita da Operator Prod. Expansion:

$$[a(z), b(w)] = [a,b](w)\delta(z-w) + (a|b)K\partial_w\delta(z-w)$$

Esempio 2: Virasoro

$Vir = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}K$, algebra di Virasoro:

$$[L_m, L_n] \;=\; L_{m+n} + c\frac{m^3-m}{12}\delta_{m,-n}K$$

Campo locale (su una rappr. V di Vir di peso massimo): $L(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}$, con OPE:

$$[L(z), L(w)] = (L'(w) + 2L(w)\partial_w + \frac{1}{2}c\partial_w^3)\delta(z-w)$$

Struttura algebrica di una v.a.

Derivata $\qquad (T\Phi)(z) = \partial_z \Phi(z)$

O.P.E e λ–bracket

Località è equiv. all' Opeator Product Expansion

$$[\Phi(z), \Psi(w)] \;=\; \sum_{n=0}^{N} c_n(w) \partial_w^n \delta(z-w)$$

Il λ–bracket è la trasformata di Fourier dell' OPE:

$$[\Phi\ {}_\lambda\ \Psi](z) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\lambda^n}{n!} c_n(z)$$

Il prodotto normalmente ordinato

Un campo $\Phi(z)$ si decompone in parte di creazione $\Phi_+(z)$ e parte di distruzione $\Phi_-(z)$

$$\Phi_+(z) = \sum_{n<0} \Phi_n z^{-n-1} \ , \qquad \Phi_-(z) = \sum_{n\geq 0} \Phi_n z^{-n-1}$$

Il prodotto normalmente ordinato è definito da:

$$:\Phi\Psi:(z) \;=\; \Phi_+(z)\Psi(z) + \Psi(z)\Phi_-(z)$$

Lemma di Dong

$\mathcal{F}$, collezione di campi a due a due locali.
$\bar{\mathcal{F}}$, ottenuta aggiungendo tutte le derivate, i λ–bracket ed i prodotti normalmente ordinati di campi in $\mathcal{F}$:

$$\bar{\mathcal{F}} \ \ni \ \{\Phi, T\Phi, c_n, :\Phi\Psi:\}$$

Allora, $\bar{\mathcal{F}}$ è di nuovo una collezione di campi a due a due locali.

Conclusione

Possiamo assumere che $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto a derivata, λ–bracket e prodotto ordinato:

$$\begin{array}{rcl} \Phi & \mapsto & T\Phi \ \in \ \mathcal{F} \\ \Phi, \Psi & \mapsto & [\Phi \ {}_\lambda \ \Psi] \ \in \ \mathcal{F}[\lambda] \\ \Phi, \Psi & \mapsto & :\Phi\Psi: \in \ \mathcal{F} \end{array}$$

Teorema (Bakalov, Kac $\sim$ 2001)

Le seguenti proprietà sono necessarie e sufficenti per avere una collezione di campi locali:

- sesquilinearità

$$
\begin{aligned}
[T\Phi \;{}_\lambda\; \Psi] &= -\lambda[\Phi \;{}_\lambda\; \Psi] \\
[\Phi \;{}_\lambda\; T\Psi] &= (\lambda + T)[\Phi \;{}_\lambda\; \Psi]
\end{aligned}
$$

- anti–simmetria

$$
[\Psi \;{}_\lambda\; \Phi] = -[\Phi \;{}_{-\lambda-T}\; \Psi]
$$

- identità di Jacobi

$$
\begin{aligned}
&[\Phi \;{}_\lambda\; [\Psi \;{}_\mu\; \chi]] - [\Psi \;{}_\mu\; [\Phi \;{}_\lambda\; \chi]] \\
&= [[\Phi \;{}_\lambda\; \Psi] \;{}_{\lambda+\mu}\; \chi]
\end{aligned}
$$

- quasi–associatività

$$: (: \Phi\Psi :)\chi : - : \Phi(: \Psi\chi :) : =$$
$$: \Big(\int_0^T d\lambda \Phi \Big) [\Psi \,{}_\lambda\, \chi] : + \; : \Big(\int_0^T d\lambda \Psi \Big) [\Phi \,{}_\lambda\, \chi] :$$

- anti–simmetria del prodotto ordinato

$$: \Phi\Psi : - : \Psi\Phi : = \int_{-T}^{0} d\lambda [\Phi \,{}_\lambda\, \Psi]$$

- formula di Wick non commutativa

$$[\Phi \,{}_\lambda\, : \Psi\chi :] \; = : [\Phi \,{}_\lambda\, \Psi]\chi : + : \Psi[\Phi \,{}_\lambda\, \chi] :$$
$$+ \int_0^\lambda d\mu [[\Phi \,{}_\lambda\, \Psi] \,{}_\mu\, \chi] \; .$$

Definizione (Kac $\sim$ 1995)

Un' algebra di Lie conforme R è uno spazio vettoriale dotato di un endomorfismo $T \in \mathrm{End}R$ ed un λ–bracket

$$\Phi \otimes \Psi \mapsto [\Phi \ {}_\lambda \ \Psi] \ \in \ R[\lambda]$$

soddisfacente i seguenti assiomi

<u>Definizione</u> Un' algebra di vertice è uno spazio vettoriale V, un elemento $|0\rangle \in V$, un endomorfismo $T \in \text{End}R$, e due operazioni:

A) un λ–bracket $[\Phi\ {}_\lambda\ \Psi]$, che lo rende un' algebra di Lie conforme

B) un prodotto normalmente ordinato $:\Phi\Psi:$, che lo rende un algebra differenziale con unità $|0\rangle$.

Soddisfano i seguenti assiomi:

Definizione (Kac $\sim$ 1995)

Un' algebra di Lie conforme R è uno spazio vettoriale dotato di un endomorfismo $T \in \mathrm{End}R$ ed un λ–bracket

$$\Phi \otimes \Psi \mapsto [\Phi\ {}_\lambda\ \Psi] \ \in \ R[\lambda]$$

soddisfacente i seguenti assiomi

- sesquilinearità

$$\begin{aligned} [T\Phi\ {}_\lambda\ \Psi] &= -\lambda[\Phi\ {}_\lambda\ \Psi] \\ [\Phi\ {}_\lambda\ T\Psi] &= (\lambda + T)[\Phi\ {}_\lambda\ \Psi] \end{aligned}$$

- anti–simmetria

$$[\Psi\ {}_\lambda\ \Phi] = -[\Phi\ {}_{-\lambda-T}\ \Psi]$$

- identità di Jacobi

$$[\Phi\ {}_\lambda\ [\Psi\ {}_\mu\ \chi]] - [\Psi\ {}_\mu\ [\Phi\ {}_\lambda\ \chi]]$$

$$= [[\Phi\ {}_\lambda\ \Psi]\ {}_{\lambda+\mu}\ \chi]$$

Definizione Un' algebra di vertice è uno spazio vettoriale V, un elemento $|0\rangle \in V$, un endomorfismo $T \in \mathrm{End}R$, e due operazioni:

A) un λ–bracket $[\Phi\ {}_\lambda\ \Psi]$, che lo rende un' algebra di Lie conforme

B) un prodotto normalmente ordinato $:\Phi\Psi:$, che lo rende un algebra differenziale con unità $|0\rangle$.

Soddisfano i seguenti assiomi:

- quasi–associatività

$$:(:\Phi\Psi:)\chi: - :\Phi(:\Psi\chi:): =$$
$$:\left(\int_0^T d\lambda \Phi\right)[\Psi\ {}_\lambda\ \chi]: + \ :\left(\int_0^T d\lambda \Psi\right)[\Phi\ {}_\lambda\ \chi]:$$

- anti–simmetria del prodotto ordinato

$$:\Phi\Psi: - :\Psi\Phi: = \int_{-T}^{0} d\lambda [\Phi\ {}_\lambda\ \Psi]$$

- formula di Wick non commutativa

$$[\Phi\ {}_\lambda\ :\Psi\chi:] = :[\Phi\ {}_\lambda\ \Psi]\chi: + :\Psi[\Phi\ {}_\lambda\ \chi]:$$
$$+ \int_0^\lambda d\mu [[\Phi\ {}_\lambda\ \Psi]\ {}_\mu\ \chi]\ .$$

Definizione

Un' algebra di Lie differenziale R è uno spazio vettoriale dotato di un endomorfismo $T \in \mathrm{End}R$ ed un Lie–bracket

$$\Phi \otimes \Psi \mapsto [\Phi \ , \ \Psi] \ \in \ R$$

soddisfacente i seguenti assiomi

- regola di Leibniz

$$T[\Phi \ , \ \Psi] = [T\Phi \ , \ \Psi] + [\Phi \ , \ T\Psi]$$

- anti–simmetria

$$[\Psi \ , \ \Phi] \ = \ -[\Phi \ , \ \Psi]$$

- identità di Jacobi

$$[\Phi \ , \ [\Psi \ , \ \chi]] - [\Psi \ , \ [\Phi \ , \ \chi]]$$

$$= \ [[\Phi \ , \ \Psi] \ , \ \chi]$$

Definizione Un' algebra associativa differenziale con unita' è uno spazio vettoriale V, un elemento $|0\rangle \in V$, un endomorfismo $T \in \mathrm{End}R$, e due operazioni:
A) un Lie–bracket $[\Phi \ {}_{,}\ \Psi]$, che lo rende un' algebra di Lie differenziale
B) un prodotto associativo $\Phi \cdot \Psi$, che lo rende un algebra differenziale con unità $|0\rangle$.
Soddisfano i seguenti assiomi:

- associatività

$$(\Phi \cdot \Psi) \cdot \chi - \Phi \cdot (\Psi \cdot \chi) \ = \ 0$$

- anti–simmetria del prodotto associativo

$$\Phi \cdot \Psi - \Psi \Phi \ = [\Phi \ , \ \Psi]$$

- regola di Leibniz

$$[\Phi \ , \ \Psi \cdot \chi] \ = \ [\Phi \ , \ \Psi] \cdot \chi + \Psi \cdot [\Phi \ , \ \chi]$$

Ulteriori analogie:

1) Algebra di vertice $\Rightarrow$ Algebra di Lie conforme

Per def., un algebra di vertice è anche un' algebra di Lie conforme, e vale la relazione

$$:\Phi\Psi: - :\Psi\Phi: = \int_{-T}^{0} d\lambda [\Phi\ {}_\lambda\ \Psi]$$

2) Algebra di Lie conforme $\Rightarrow$ Algebra di vertice

Data un'algebra di Lie conforme R, esiste ed e' unica l' algebra di vertice universale inviluppante $V(R)$ e vale il teorema PBW: una base di $V(R)$ è costituita dai monomi ordinati

$$:\Phi_{i_1} \cdots \Phi_{i_s}: \quad , \quad i_1 \leq \cdots \leq i_s$$

Esempi di algebre di Lie conformi

Esempio 1. $\mathfrak{g}$: algebra di Lie semplice, con una forma bilineare, simmetrica, invariante (a, b). L' algebra conforme di correnti è

$$\mathrm{Cur}\mathfrak{g} \;=\; (\mathbb{C}[T] \otimes \mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}|0\rangle$$

con λ–bracket dato da ($|0\rangle$ centrale)

$$[a\;_\lambda\;b] = [a, b] + \lambda k(a, b)|0\rangle \;, \quad a, b \in \mathfrak{g}$$

$k \in \mathbb{C}$ è detto livello di Kac–Moody.

Esempio 2. L' algebra conforme di Virasoro è

$$Vir \;=\; (\mathbb{C}[T]L) \oplus \mathbb{C}|0\rangle$$

con λ–bracket

$$[L\;_\lambda\;L] = (T + 2\lambda)L + \frac{c}{12}\lambda^3|0\rangle$$

$c \in \mathbb{C}$ è detta carica centrale.

Osservazione Le algebre inviluppanti universali $V(\mathrm{Cur}\mathfrak{g})$ e $V(Vir)$ sono le algebre di vertice descritte prima.

Algebre conformi non–lineari

Problema:

Non tutte le algebre di vertice V sono $\simeq V(R)/I$, per qualche algebra di Lie conforme R.

(a) algebre di Lie conf. (sempl., finite) sono classificate (D'Andrea-Kac, 1998, e Fattori-Kac, 2002)
(b) la classificazione di algebre di vertice (in qualunque senso) è completamente aperta.

Idea:

Nozione di algebra di Lie conforme "non-lineare".
Duplice risultato:
(i) data un alg di Lie conf non–lin, $\exists!$ l'algebra di vertice univ invil $V(R)$ (e vale un teorema PBW),
(ii) (quasi) tutte le algebre di vertice sono $\simeq V(R)/I$ per qualche alg di Lie conf non-lin.

In conclusione:

Classificare le algebra di vertice è (quasi) equival a classificare le alg conf non–lineari.

Definizione Un algebra di Lie non–lineare è uno spazio vettoriale graduato $\mathfrak{g} = \oplus_{\Delta\geq 1}\mathfrak{g}_\Delta$ dotato di

$$[\ ,\ ]\ :\ \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\ \longrightarrow\ \mathcal{T}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}\oplus\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^{\otimes 2}\oplus\ldots$$

soddisfacente le seguenti condizioni:

- rispetto della gradazione

$$\Delta([\Phi\ ,\ \Psi])\ \leq\ \Delta(\Phi)+\Delta(\Psi)-1$$

- anti–simmetria

$$[\Psi\ ,\ \Phi]\ =\ -[\Phi\ ,\ \Psi]$$

- identità di Jacobi(*)

$$[\Phi,[\Psi,\chi]]-[\Psi,[\Phi,\chi]]-[[\Phi,\Psi],\chi]\in\mathcal{M}_\Delta(\mathfrak{g})$$

per $\Delta\leq\Delta(\Phi)+\Delta(\Psi)+\Delta(\Psi)-1$, dove

$$\mathcal{M}_\Delta(\mathfrak{g}) = \left\{\begin{array}{c} A\otimes(b\otimes c-c\otimes b-[b,c])\otimes D \\ \Delta(A\otimes b\otimes c\otimes D))\leq\Delta \end{array}\right\}$$

(Notazione: $b,c\in\mathfrak{g}, A,D\in\mathcal{T}(\mathfrak{g})$)

Risultato: $U(R)=\mathcal{T}(R)/\mathcal{M}(R)$ è un' algebra associativa inviluppante universale e vale il Teorema PBW.

Risultati: (math-ph/0312042)

Teorema 1

Sia R un' algebra di Lie conforme non–lineare.

1. Esiste (ed è unica) l' algebra di vertice invil. univ. $U(R) = \mathcal{T}(R)/\mathcal{M}(R)$,
2. il Teorema PBW vale, cioè una base di $U(R)$ è

$$\{: \Phi_{i_1} \cdots \Phi_{i_n} : \quad , \qquad i_1 \leq \cdots \leq i_n\}$$

Teorema 2

Sia V un algebra di vertice graduata "non–degenere", generata liberamente da $R \subset V$ (cioè tale che il Teorema PBW vale). Allora R è dotato della struttura di algebra di Lie conforme non–lineare.

Conclusione:

Le algebra di vertice graduate non–degeneri sono "categoricamente equivalenti" alle algebre di Lie conformi non–lineari.

Applicazione: classificazione di v.a.

Problema

Classificare le algebre di vertice (non–degeneri) V finitamente generate da

- un elemento di Virasoro L,
- uno spazio $\mathfrak{g}$ di correnti (campi primari pari di peso conforme 1),
- uno spazio U di campi primari dispari di peso conforme 3/2.

Osservazioni preliminari:

1. V è graduata dal peso conforme,
2. $\mathfrak{g}$ è un' algebra di Lie, e U è un modulo su $\mathfrak{g}$,
3. se V è non–deg., allora $R = \mathbb{C}[T](\mathfrak{g} \oplus U \oplus \mathbb{C}L)$ è un' algebra di Lie conf. non–lin.

Conclusione:

Dobbiamo classificare le coppie $(\mathfrak{g}, U)$, tali che R è un' algebra di Lie conf non–lin.

Teorema

La lista completa di coppie $(\mathfrak{g}, U)$ tali che
$\mathfrak{g}$ è un'algebra di Lie riduttiva,
U è una generica rapresentazione di $\mathfrak{g}$,
tali che esiste un'algebra di vertice V
non–degenere, con limite classico (per $\mathfrak{g}$ semplice, U irriducibile, tale ipotesi non è necessaria), è la seguente:

$\mathfrak{g}$	U
so_n	$\mathbb{C}^n,\ n \geq 3, n \neq 4$
B_3	π_3
G_2	π_1
sl_2	$\mathbb{C}^2 \oplus C^2$
gl_n	$\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^{n,*},\ n \neq 2$
$\mathrm{sp}_n \oplus \mathrm{sp}_2$	$\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2,\ n \geq 2$

Osservazione

Esistono anche delle algebre di vertice "degeneri", con valore fissato del livello di Kac–Moody k e della carica centrale c.